Universidad Simón Bolívar.
Matemáticas II (MA-1112).
Enero – marzo 2013.
christianlaya@hotmail.com ; @ChristianLaya

Tercer examen parcial (40%)
Tipo A (1-2)

1. *Calcule la siguiente integral:*

$$\int (3-x)7^{(3-x)^2}dx$$

Solución:

Hacemos un cambio de variable: $u=(3-x)^2 \Longrightarrow du=-2(3-x)dx$

$$=-\frac{1}{2}\int 7^u du=-\frac{1}{2}\left(\frac{7^u}{\ln(7)}\right)+c=-\frac{1}{2}\left(\frac{7^{(3-x)^2}}{\ln(7)}\right)+c$$

2. *Resuelva la siguiente ecuación:*

$$\ln(2x+3)-\ln(2x-3)=\ln(2)$$

Solución:

Primero, debemos hallar el dominio de la ecuación para así conocer qué valores o intervalo de valores son admisibles:

Sea $f(x)=\ln(2x+3)$, *tiene sentido si y sólo si* $2x+3>0 \Longrightarrow x>-3/2$, *entonces,* $Domf=\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$

Sea $g(x)=\ln(2x-3)$, *tiene sentido si y sólo si* $2x-3>0 \Longrightarrow x>3/2$, *entonces,* $Domg=\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

Sea $h(x)=\ln(2)$, *tiene sentido si y sólo si* $2\in\mathbb{R}$, *entonces,* $Domh=\mathbb{R}$.

El dominio de la ecuación será la intercepción de todos los dominios anteriores:

$$Domf\cap Domg\cap Domh=\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$$

Procedemos a resolver la ecuación:

$$\ln(2x+3)-\ln(2x-3)=\ln(2)\Longrightarrow \ln\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)=\ln(2)\Longrightarrow \frac{2x+3}{2x-3}=2\Longrightarrow 2x+3=2(2x-3)$$

$$\Longrightarrow 2x+3=4x-6\Longrightarrow 2x=9\Longrightarrow x=\frac{9}{2}$$

El valor pertenece al dominio de la ecuación y, por ende, diremos que la solución de la ecuación es $x=9/2$.

3. *Calcule el siguiente límite:*

$$\lim_{x \to 0} (2 - \cos(x))^{1/x^2}$$

<u>Solución</u>:

Si evaluamos $x = 0$ obtenemos una indeterminación del tipo 1^{∞}, diremos que:

$$\lim_{x \to 0} (2 - \cos(x))^{1/x^2} = \lim_{x \to 0} e^{\ln\left((2-\cos(x))^{1/x^2}\right)} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln(2-\cos(x))}$$

Resolvemos el límite por separado:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln(2 - \cos(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{2 - \cos\,(x)}{x^2}$$

Si evaluamos $x = 0$ obtenemos una indeterminación del tipo 0/0. Aplicamos L' Hopital:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{2x} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

Concluimos que:

$$\lim_{x \to 0} (2 - \cos(x))^{1/x^2} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

4. *Calcule el siguiente límite:*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(sen^2(x)\right)}{3\ln\left(tg(x)\right)}$$

<u>Solución</u>:

Si evaluamos $x = 0$ obtenemos una indeterminación del tipo ∞/∞. Aplicamos L' Hopital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln\left(sen^2(x)\right)}{3\ln\left(tg(x)\right)} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{sen^2(x)}(2sen(x)\cos(x))}{\frac{1}{tg(x)}(\sec^2(x))} = \frac{2}{3} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos^2(x) sen(x)}{sen(x)} = \frac{2}{3}$$

5. *Averigüe si la integral impropia:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

Es o no convergente, y en caso afirmativo, calcúlela.

<u>Solución</u>:

Definimos la función del integrando:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}, \qquad Domf = \{(-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)\}$$

Observamos que los límites de integración no pertenecen al dominio de la función y, por ende, diremos que la integral es doblemente impropia.

Para resolverla, partimos los límites de integración $x \in (0,+\infty)$ en valores que sean admisibles:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x+1\sqrt{x}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{x+1\sqrt{x}} + \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x+1\sqrt{x}}$$

Resolvemos la integral indefinida mediante un cambio de variable: $u^2 = x \Longrightarrow 2udu = dx$

$$\int \frac{dx}{x+1\sqrt{x}} = 2\int \frac{u}{(u^2+1)u} du = 2\int \frac{du}{u^2+1} = 2arctg(u) + c = 2arctg(\sqrt{x}) + c$$

Sustituimos el valor obtenido:

$$= \lim_{a\to 0^+} \left(2arctg(1) - 2arctg(\sqrt{a})\right) + \lim_{b\to+\infty} \left(2arctg(\sqrt{b}) - 2arctg(1)\right)$$

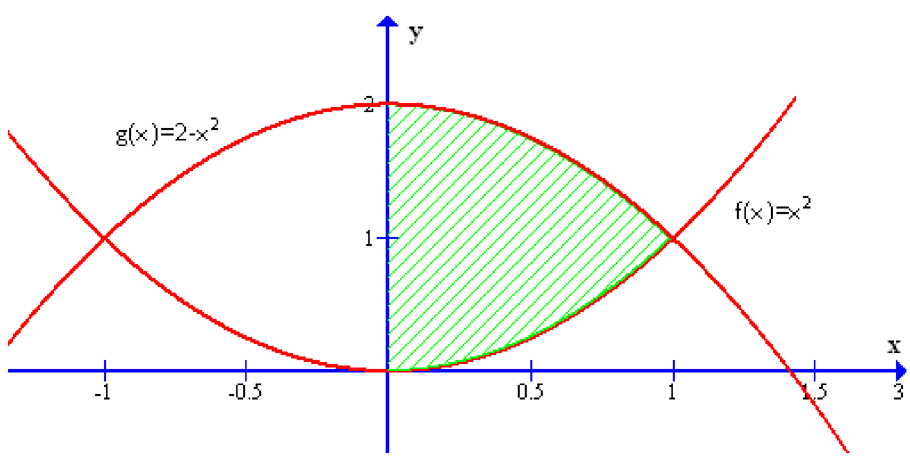
$$= -2arctg(0) + 2arctg(\infty) = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Concluimos entonces que la integral dada converge a π.

6. *Halle el volumen del sólido en revolución que se genera girando alrededor del eje Y la figura del primer cuadrante limitada por el eje y las gráficas de las dos funciones x^2 y $2-x^2$, definidas en el intervalo $[0,1]$.*

Solución:

Graficamos las funciones:



Resolvemos mediante el método de cascarones:

$$V(R) = 2\pi \int_{0}^{1} x(2 - x^2 - x^2)dx = 2\pi \int_{0}^{1} x(2 - 2x^2)dx = 2\pi \int_{0}^{1} (2x - 2x^3)dx = \pi$$

Entonces, concluimos que el volumen de la región es π.